Olimpiada Republicană la Matematică
Prima zi, 29 februarie 2020, Clasa a XII–a
Barem de evaluare

12.1. a) Calculați:

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \arcsin\frac{1}{x}\right) dx.$$

b) Comparați numerele: $\frac{\pi}{6}$ și $\ln\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	$I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \arcsin\frac{1}{x}\right) dx = \ln x\vert_1^2 - x\arcsin\frac{1}{x}\Big\vert_1^2 + \int_1^2 x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx =$	2 puncte
2.	$I = \ln 2 + \frac{\pi}{6} - \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$	1 punct
3.	$I = \ln 2 + \frac{\pi}{6} - \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\Big\vert_1^2 = \frac{\pi}{6} - \ln\frac{2+\sqrt{3}}{2}.$	1 punct
4.	Pentru $x \in [1;2]$, $\arcsin\frac{1}{x} > \frac{1}{x}$, ceea ce implică $I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \arcsin\frac{1}{x}\right) dx < 0.$	2 puncte
5.	$\frac{\pi}{6} < \ln\frac{2+\sqrt{3}}{2}$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

12.2. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} -a & \frac{1}{1-a} \\ a^3-1 & 1+a \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Determinați $A^{2021} - A^{2020}$.

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	$A^2 = \begin{pmatrix} -a-1 & \frac{1}{1-a} \\ a^3-1 & a \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$	2 puncte
2.	$A^{2020} = (A^3)^{673} \cdot A = -A$	2 puncte
3.	$A^{2021} = (A^3)^{673} \cdot A^2 = -A^2$	2 puncte
4.	Obținerea $A^{2021} - A^{2020} = -A^2 + A = I_2$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

12.3. Triunghiul ascuțitunghic isoscel ABC, $m(\angle B) = m(\angle C) = \alpha$, este baza prismei $ABCA_1B_1C_1$. Muchia laterală A_1A este perpendiculară muchiei AC, iar $m(\angle A_1AB) = \beta < 90°$. Determinați aria laterală a prismei, dacă $A_1A = BC = a$.		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	A_1ACC_1- dreptunghi, $AC = AB = \frac{a}{2\cos\alpha} \Rightarrow \mathcal{A}_{A_1ACC_1} = \frac{a^2}{2\cos\alpha}$	1 punct
2.	$$\mathcal{A}_{A_1ABB_1} = \frac{a^2}{2\cos\alpha}\sin\beta$$	1 punct
3.	Determinarea distanței de la vârful C_1 la planul ABC	1 punct
4.	Determinarea distanței de la punctul K la dreapta BC, unde K este proiecția pe planul ABC a punctului C_1	1 punct
5.	Determinarea distanței de la punctul C_1 la dreapta BC	1 punct
6.	Calcularea ariei paralelogramului BCC_1B_1	1 punct
7.	Obținerea $\mathcal{A}_{lat.} = \frac{a^2}{2\cos\alpha}\left(1 + \sin\beta + \sqrt{4\cos^2\alpha - \cos^2\beta}\right)$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

12.4. Fie $I_n = \int_1^n \frac{[x]}{x^2+1}dx$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Calculați: $\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{\ln n}$		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Obținerea, conform lemei Stolz-Cesàro $$\lim_{n\to\infty}\frac{I_n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1} - I_n}{\ln(n+1) - \ln n}$$	2 puncte
2.	$$I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1}\frac{[x]}{x^2+1}dx = n\int_n^{n+1}\frac{dx}{x^2+1} =$$	1 punct
3.	$$= n(\mathrm{arctg}\,(n+1) - \mathrm{arctg}\,n) =$$	1 punct
4.	$$= n \cdot \mathrm{arctg}\,\frac{(n+1) - n}{1 + (n+1)n} = n \cdot \mathrm{arctg}\,\frac{1}{n^2+n+1}$$	1 punct
5.	Obținerea $$\lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1} - I_n}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n \cdot \mathrm{arctg}\,\frac{1}{n^2+n+1}}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n \cdot \frac{1}{n^2+n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$$	2 puncte
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*