

Республиканская Олимпиада по Математике
второй день, 1 марта 2020, XI–й класс

11.5. Доказать, что для любых действительных чисел $x, y \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$

11.6. Последовательность $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ определяется следующими условиями: $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ и

$a_n = 2a_1a_{n-1} - a_{n-2}$, $\forall n \geq 2$. Вычислить значение a_{2020} и найти предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2}$.

11.7. Пусть ABC – заданный равносторонний треугольник. Для каждой прямой l , проходящей через вершину B , рассматриваются точки D_l и E_l , являющиеся основаниями перпендикуляров, опущенных из точек A и C , соответственно, на прямую l . Найти геометрическое место всех точек P_l , которые образуют равносторонний треугольник $P_lD_lE_l$.

11.8. Найти все действительные числа u и v , удовлетворяющие равенству

$$(u^{2020} - u^{2019}) + (v^{2020} - v^{2019}) = u \ln u + v \ln v.$$

Время работы: 240 минут.

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Успехов !

Республиканская Олимпиада по Математике
второй день, 1 марта 2020, XI–й класс

11.5. Доказать, что для любых действительных чисел $x, y \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$

11.6. Последовательность $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ определяется следующими условиями: $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ и

$a_n = 2a_1a_{n-1} - a_{n-2}$, $\forall n \geq 2$. Вычислить значение a_{2020} и найти предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2}$.

11.7. Пусть ABC – заданный равносторонний треугольник. Для каждой прямой l , проходящей через вершину B , рассматриваются точки D_l и E_l , являющиеся основаниями перпендикуляров, опущенных из точек A и C , соответственно, на прямую l . Найти геометрическое место всех точек P_l , которые образуют равносторонний треугольник $P_lD_lE_l$.

11.8. Найти все действительные числа u и v , удовлетворяющие равенству

$$(u^{2020} - u^{2019}) + (v^{2020} - v^{2019}) = u \ln u + v \ln v.$$

Время работы: 240 минут.

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Успехов !