

Olimpiada Republicană la Matematică
A doua zi, 1 martie 2020, Clasa a XI-a

11.5. Să se arate că, pentru orice numere reale $x, y \in [0, 1]$, este justă inegalitatea

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$

11.6. Fie șirul $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, definit prin relațiile $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ și $a_n = 2a_1a_{n-1} - a_{n-2}$, $\forall n \geq 2$. Să se

calculeze valoarea a_{2020} și să se determine $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2}$.

11.7. Fie ABC un triunghi echilateral fixat. Pentru fiecare dreaptă arbitrară l ce trece prin vârful B se consideră punctele D_l și E_l , ce reprezintă piciorul perpendicularei duse din punctul A, respectiv C, la dreapta l . Să se determine locul geometric al tuturor punctelor P_l , ce formează un triunghi echilateral $P_l D_l E_l$.

11.8. Să se afle valorile reale u și v ce verifică egalitatea

$$(u^{2020} - u^{2019}) + (v^{2020} - v^{2019}) = u \ln u + v \ln v.$$

Timp de lucru: 240 minute.

Rezolvarea corectă a fiecărei probleme se apreciază cu 7 puncte. MULT SUCCES !

Olimpiada Republicană la Matematică
A doua zi, 1 martie 2020, Clasa a XI-a

11.5. Să se arate că, pentru orice numere reale $x, y \in [0, 1]$, este justă inegalitatea

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$

11.6. Fie șirul $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, definit prin relațiile $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ și $a_n = 2a_1a_{n-1} - a_{n-2}$, $\forall n \geq 2$. Să se

calculeze valoarea a_{2020} și să se determine $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2}$.

11.7. Fie ABC un triunghi echilateral fixat. Pentru fiecare dreaptă arbitrară l ce trece prin vârful B se consideră punctele D_l și E_l , ce reprezintă piciorul perpendicularei duse din punctul A, respectiv C, la dreapta l . Să se determine locul geometric al tuturor punctelor P_l , ce formează un triunghi echilateral $P_l D_l E_l$.

11.8. Să se afle valorile reale u și v ce verifică egalitatea

$$(u^{2020} - u^{2019}) + (v^{2020} - v^{2019}) = u \ln u + v \ln v.$$

Timp de lucru: 240 minute.

Rezolvarea corectă a fiecărei probleme se apreciază cu 7 puncte. MULT SUCCES !