Olimpiada Republicană la Matematică
A doua zi, 1 martie 2020, Clasa a XI–a

Soluții

11.5. *Să se arate că, pentru orice numere reale* $x, y \in [0,1]$, *este justă inegalitatea*

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \le \frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$

Soluție.

Ridicând la pătrat, obținem $\frac{1}{1+x^2}+\frac{2}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{1+y^2} \le \frac{4}{1+xy}$. Conform inegalității mediilor pentru 2 numere $u, v \ge 0$, avem $2\sqrt{uv} \le u+v$. Atunci $\frac{2}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}} \le \frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}$.

Astfel este suficient de demonstrat că $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2} \le \frac{2}{1+xy}$. Deoarece $0 \le x, y \le 1$, atunci $xy \ge 0$ și $1+xy \ge 1$. Atunci avem un șir de inegalități echivalente

$$\frac{1+y^2+1+x^2}{(1+x^2)(1+y^2)}-\frac{2}{1+xy} \le 0 \Leftrightarrow (2+x^2+y^2)(1+xy)-2(1+x^2)(1+y^2) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2xy+x^3y+xy^3-x^2-y^2-2x^2y^2 \le 0 \Leftrightarrow (x-y)^2(xy-1) \le 0$$

ceea ce este evident adevărat, pentru că $0 \le x, y \le 1$.

11.6. *Fie șirul* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, *definit prin relațiile* $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ *și* $a_n = 2a_1a_{n-1} - a_{n-2}$, $\forall n \ge 2$. *Să se calculeze valoarea* a_{2020} *și să se determine* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$.

Soluție.

Avem $a_2 = 2a_1^{\,2} - a_0 = 2\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2 - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a_3 = 2a_1a_2 - a_1 = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) - \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$a_4 = 2a_1a_3 - a_2 = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$. Aceste valori ne induc presupunerea rezonabilă $a_n = \cos\left(\frac{\pi}{12}n\right)$, $\forall n \ge 2$. Vom demonstra justețea ei cu ajutorul metodei inducției matematice. Într-adevăr, avem

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\cdot 2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = a_2.$$

Fie afirmația adevărată pentru $\forall n < N$, $N \ge 2$. Să demonstrăm justețea afirmației și pentru $n = N$. Într-adevăr, avem

$$a_N = 2a_1a_{N-1} - a_{N-2} = 2\cos\frac{\pi}{12}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}(N-1)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{12}(N-2)\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{12}(N-1)+\frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{12}(N-1)-\frac{\pi}{12}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{12}(N-2)\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{12}N\right) + \cos\left(\frac{\pi}{12}(N-2)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{12}(N-2)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}N\right).$$

Conform metodei inducției matematice, avem $a_n = \cos\left(\frac{\pi}{12}n\right)$, $\forall n \geq 2$.

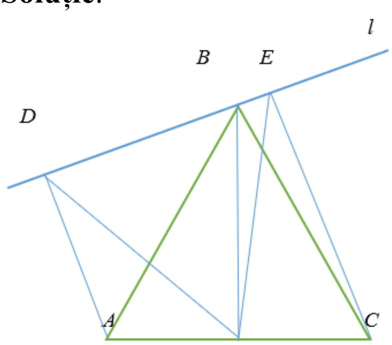
Deoarece funcția cosinus este periodică cu perioada 2π, rezultă că șirul $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ este periodic cu perioada 24. Deci, $a_{2020} = a_{2020 \bmod 24} = a_4 = \frac{1}{2}$.

Calculăm $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$. Obținem $0 \leq \left|\frac{a_n}{n^2}\right| = \left|\frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{\pi}{12}n\right)\right| \leq \frac{1}{n^2}$. Trecând la limită cu $n\to\infty$, obținem

$0 \leq \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{n^2}\right| \leq \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$, adică $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{n^2}\right| = 0$, ceea ce implică $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2} = 0$.

11.7. *Fie ABC un triunghi echilateral fixat. Pentru fiecare dreaptă arbitrară l ce trece prin vârful B se consideră punctele D_l și E_l, ce reprezintă piciorul perpendicularei duse din punctul A, respectiv C, la dreapta l. Să se determine locul geometric al punctelor P_l, ce formează un triunghi echilateral $P_lD_lE_l$.*

Soluție.



Sunt posibile diferite localizări ale dreptei l. Considerăm cazul de localizare a dreptei l, reprezentat în desen; alte cazuri se consideră în mod analogic. Fie *O* este piciorul perpendicularei duse din B la AC (și mijlocul laturii *AC*).

Deoarece $\angle BDA = \angle BOA = 90°$, atunci punctele A, D, B și O sunt cociclice. Unghiurile $\angle BAO$ și $\angle BDO$ în acest cerc se bazează pe unul și același arc BO, atunci $\angle BDO = \angle BAO = 60°$. Similar, $\angle BEO = \angle BCO = 60°$. Prin urmare, triunghiul DOE este echilateral, și $P \equiv O$, adică vârful *P* al unui triunghi echilateral căutat totdeauna coincide cu mijlocul *O* al laturi *AC*.

Vârful P al altui triunghi căutat DPE este simetric punctului fixat O în raport cu dreapta l. Atunci conform simetriei obținem că întotdeauna $BP = BO$ (unde *BO* este distanța fixată, egală cu lungimea înălțimii *BO* a triunghiului *ABC*). Apare ipoteza, că locul geometric căutat al punctului *P* este cercul cu centrul în punctul *B* și raza *BO*.

Să arătăm, că pentru orice punct P al acestui cerc ($P \neq O$) va fi vârf al triunghiului echilateral *DEP* pentru o oarecare dreaptă l, care trece prin punctul *B*. Unim punctele *P* și *O* (obținem coarda *PO*) și prin mijlocul *M* a coardei *PO* trasăm dreapta l, perpendiculară *PO*. Ea va trece prin punctul *B*, pentru că perpendiculara de mijloc la coardă totdeauna este diametrul cercului.

11.8. *Să se afle valorile reale* u *și* v *ce verifică egalitatea*

$$(u^{2020}-u^{2019})+(v^{2020}-v^{2019})=u\ln u+v\ln v.$$

Soluție.

Conform domeniului de valori ale egalității din enunț, trebuie să avem $u>0$ și $v>0$. Fixăm $u>0$ și $v>0$; fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=u^x+v^x$. Această funcție este derivabilă de două ori pe $\mathbb{R}$. Calculând derivatele de ordin 1 și 2, obținem $f'(x)=u^x\ln u+v^x\ln v$ și $f''(x)=u^x\ln^2 u+v^x\ln^2 v$.

Egalitatea din enunț devine $f(2020)-f(2019)=f'(1)$. Deoarece funcția f este continuă pe $[2019,2020]$ și derivabilă pe $(2019,2020)$, conform teoremei Lagrange, obținem faptul că există $c\in(2019,2020)$ astfel încât $f'(1)=f(2020)-f(2019)=f'(c)\cdot(2020-2019)=f'(c)$.

În continuare, deoarece funcția f' este continuă pe $[1,c]$ și derivabilă pe $(1,c)$ și $f'(1)=f'(c)$, conform teoremei Rolle, obținem faptul că există $d\in(1,c)$ astfel încât $f''(d)=0$.

Am obținut faptul că $u^d\ln^2 u+v^d\ln^2 v=0$ pentru un careva $d\in(1,c)$. Deoarece $u^d\ln^2 u\geq 0$ și $v^d\ln^2 v\geq 0$, rezultă că $u^d\ln^2 u+v^d\ln^2 v=0$ doar dacă $u^d\ln^2 u=v^d\ln^2 v=0$. În continuare, deoarece $u^d>0$ și $v^d>0$, obținem $\ln u=\ln v=0$, adică $u=v=1$. Verificând aceste valori, obținem faptul că $u=v=1$ sunt unicile valori reale ce verifică egalitatea din enunț.