Республиканская Олимпиада по Математике
второй день, 1 марта 2020, XI–й класс
Схема оценки работ

<table>
<tr><td colspan="3">11.5. Доказать, что для любых действительных чисел $x, y \in [0,1]$ выполняется неравенство
$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \le \frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Этапы решения со схемой распределения баллов</td></tr>
<tr><td>Шаг</td><td>Этапы решения</td><td>Количество баллов</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Получение равносильного неравенства
$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{2}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{1+y^2} \le \frac{4}{1+xy},$$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Доказательство вспомогательного неравенства
$$\frac{2}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}} \le \frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}.$$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Доказательство утверждения, что достаточно показать, что
$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2} \le \frac{2}{1+xy}.$$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Переход к эквивалентному неравенству
$$\frac{(2+x^2+y^2)(1+xy)-2(1+x^2)(1+y^2)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)} \le 0$$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Переход к эквивалентному неравенству
$$(2+x^2+y^2)(1+xy)-2(1+x^2)(1+y^2) \le 0$$(через избавление от знаменателя, учитывая неравенство $1+xy \ge 1$).</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Переход к эквивалентному неравенству
$$2xy+x^3y+xy^3-x^2-y^2-2x^2y^2 \le 0$$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Переход к эквивалентному верному неравенству $(x-y)^2(xy-1) \le 0$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Общее количество баллов</td><td>7 баллов</td></tr>
</table>

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

11.6. *Последовательность* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *определяется следующими условиями:* $a_0 = 1$, $a_1 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ *и* $a_n = 2a_1 a_{n-1} - a_{n-2}$, $\forall n \geq 2$. *Вычислить значение* a_{2020} *и найти предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n^2}$.		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Формулирование правдоподобной гипотезы: $a_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{12} n\right)$, $\forall n \geq 2$.	1
2	Доказательство гипотезы при $n = 2$.	1
3	Использование формулы $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$ (для доказательства общего случая по индукции).	1
4	Завершение доказательства формулы $a_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{12} n\right)$, $\forall n \geq 2$ *(по индукции)*.	1
5	Вычисление числа $a_{2020} = \dfrac{1}{2}$ (исходя из периодичности последовательности).	1
6	Доказательство неравенства $0 \leq \left\lvert\dfrac{a_n}{n^2}\right\rvert \leq \dfrac{1}{n^2}$, $\forall n \geq 2$.	1
7	Нахождение предела $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n^2} = 0$.	1
	Общее количество баллов	**7 баллов**

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

11.7. *Пусть ABC – заданный равносторонний треугольник. Для каждой прямой l, проходящей через вершину B, рассматриваются точки D_l и E_l, являющиеся основаниями перпендикуляров, опущенных из точек A и C, соответственно, на прямую l. Найти геометрическое место всех точек P_l, которые образуют равносторонний треугольник $P_lD_lE_l$.*

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Рассмотрение точки *O* – основания перпендикуляра из точки B на AC и доказательство того, что эта точка является серединой отрезка *AC*.	1
2	Доказательство того, что точки A, D, B и O лежат на одной окружности.	1
3	Вывод равенств $\angle BDO = \angle BAO = 60^\circ$ и $\angle BEO = \angle BCO = 60^\circ$.	1
4	Доказательство того, что треугольник DOE равносторонний, и тогда $P \equiv O$.	1
5	Доказательство того, что расстояние $BP = BO$ постоянно (независимо от положения прямой l).	1
6	Формулирование гипотезы о том, что геометрическое место точек *P* есть окружность с центром в точке *B* и радиусом *BO*.	1
7	Доказательство гипотезы.	1
	Общее количество баллов	**7 баллов**

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

11.8. Найти все действительные числа u и v, удовлетворяющие равенству

$$(u^{2020} - u^{2019}) + (v^{2020} - v^{2019}) = u\ln u + v\ln v.$$

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Определение области допустимых значений: $u > 0$ и $v > 0$.	1
2	Рассмотрение функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = u^x + v^x$. Доказательство существования и вычисление производных порядка 1 и 2 от этой функции..	1
3	Проверка выполнения условий теоремы Лагранжа к функции f.	1
4	Доказательство того, что существует число $c \in (2019, 2020)$ такое, что $f'(1) = f'(c)$.	1
5	Проверка выполнения условий теоремы Ролля к функции f'.	1
6	Доказательство того, что существует число $d \in (1, c)$ такое, что $f''(d) = 0$.	1
7	Доказательство существования и единственности решения $u = v = 1$.	1
	Общее количество баллов	**7 баллов**

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*