Olimpiada Republicană la Matematică
A doua zi, 1 martie 2020, Clasa a XI–a
Barem de evaluare

***11.5**. Să se arate că, pentru orice numere reale $x, y \in [0,1]$, este justă inegalitatea*

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \le \frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Obținerea inegalității echivalente $\frac{1}{1+x^2}+\frac{2}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{1+y^2} \le \frac{4}{1+xy}$.	1
2	Demonstrarea inegalității $\frac{2}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}} \le \frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}$.	1
3	Obținerea faptului că este suficient de demonstrat că $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2} \le \frac{2}{1+xy}$.	1
4	Obținerea unei inegalități echivalente, similare cu $\frac{(2+x^2+y^2)(1+xy)-2(1+x^2)(1+y^2)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)} \le 0$ (prin trecerea termenilor într-o singură parte și aducerea la numitorul comun).	1
5	Obținerea unei inegalități echivalente, similare cu $(2+x^2+y^2)(1+xy)-2(1+x^2)(1+y^2) \le 0$ (prin eliminarea numitorului, datorită inegalității $1+xy \ge 1$).	1
6	Obținerea unei inegalități echivalente, similare cu $2xy+x^3y+xy^3-x^2-y^2-2x^2y^2 \le 0$ (prin deschiderea parantezelor).	1
7	Obținerea și argumentarea justeței inegalității echivalente $(x-y)^2(xy-1) \le 0$.	1
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

11.6. *Fie șirul* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, *definit prin relațiile* $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ *și* $a_n = 2a_1 a_{n-1} - a_{n-2}$, $\forall n \geq 2$. *Să se calculeze valoarea* a_{2020} *și să se determine* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^2}$.		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Presupunerea rezonabilă $a_n = \cos\left(\frac{\pi}{12} n\right)$, $\forall n \geq 2$.	1
2	Demonstrarea presupunerii pentru $n = 2$.	1
3	Utilizarea formulei $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$ (la pasul general).	1
4	Finalizarea demonstrației formulei $a_n = \cos\left(\frac{\pi}{12} n\right)$, $\forall n \geq 2$.	1
5	Obținerea termenului $a_{2020} = \frac{1}{2}$ (reieșind din periodicitatea șirului).	1
6	Obținerea inegalității $0 \leq \left\|\frac{a_n}{n^2}\right\| \leq \frac{1}{n^2}$, $\forall n > 0$.	1
7	Determinarea $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^2} = 0$.	1
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

11.7. *Fie ABC un triunghi echilateral fixat. Pentru fiecare dreaptă arbitrară* l *ce trece prin vârful B se consideră punctele* D_l *și* E_l, *ce reprezintă piciorul perpendicularei duse din punctul* A, *respectiv* C, *la dreapta* l. *Să se determine locul geometric al tuturor punctelor* P_l, *ce formează un triunghi echilateral* $P_l D_l E_l$.		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Considerarea punctului *O* – piciorul perpendicularei duse din B la AC și afirmarea faptului că el este mijlocul laturii *AC*.	1
2	Argumentarea faptului că punctele A, D, B și O sunt cociclice.	1
3	Obținerea relațiilor $\angle BDO = \angle BAO = 60°$ și $\angle BEO = \angle BCO = 60°$.	1
4	Obținerea faptului că DOE este echilateral, și, respectiv, $P \equiv O$.	1
5	Obținerea faptului că distanța $BP = BO$ e constantă (indiferent de poziția dreptei l).	1
6	Ipoteza că locul geometric al punctului *P* este cercul cu centrul în *B* și rază *BO*.	1
7	Demonstrarea ipotezei.	1
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

11.8. *Să se afle valorile reale u și v ce verifică egalitatea* $(u^{2020}-u^{2019})+(v^{2020}-v^{2019})=u\ln u+v\ln v$.		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Determinarea domeniului de valori admisibile $u>0$ și $v>0$.	1
2	Considerarea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=u^x+v^x$. Menționarea faptului că ea este dublu derivabilă pe $\mathbb{R}$ și calcularea derivatelor de ordin 1 și 2.	1
3	Verificarea condițiilor de aplicare a teoremei Lagrange.	1
4	Obținerea faptului că există $c\in(2019,2020)$ astfel încât $f'(1)=f'(c)$.	1
5	Verificarea condițiilor de aplicare a teoremei Rolle.	1
6	Obținerea faptului că există $d\in(1,c)$ astfel încât $f''(d)=0$.	1
7	Obținerea și argumentarea unicității soluției $u=v=1$.	1
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*