

## Olimpiada Republicană la Matematică

### Prima zi, 29 februarie 2020, Clasa a XI-a

11.1. Pentru ce valori reale ale parametrului  $a$  graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 14x^2 + ax$$

are o axă de simetrie paralelă cu dreapta  $x = 0$ ?

11.2. Fie șirul  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  astfel încât  $a_1 = 1$  și

$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n}), \quad \forall m \geq n \geq 0.$$

Să se determine  $a_{2020}$ .

11.3. Pentru ce valori reale  $\alpha$  ecuația  $\sin 3x = \alpha \sin x + (4 - 2|\alpha|)\sin^2 x$  are aceeași mulțime de soluții reale ca și ecuația  $\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2 \sin x \cos 2x$ ?

11.4. Fie că în tetraedru se intersectează două segmente, care vin din capetele unei laturi, în centrele cercurilor înscrise ale fețelor opuse. Demonstrați că două segmente, care vin din capetele laturi, care se încrucișează cu latura inițială, în centrele cercurilor înscrise a altor două fețe, prin urmare, la fel se intersectează.

**Timp de lucru: 240 minute.**

**Rezolvarea corectă a fiecărei probleme se apreciază cu 7 puncte. MULT SUCCES !**

## Olimpiada Republicană la Matematică

### Prima zi, 29 februarie 2020, Clasa a XI-a

11.1. Pentru ce valori reale ale parametrului  $a$  graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 14x^2 + ax$$

are o axă de simetrie paralelă cu dreapta  $x = 0$ ?

11.2. Fie șirul  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  astfel încât  $a_1 = 1$  și

$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n}), \quad \forall m \geq n \geq 0.$$

Să se determine  $a_{2020}$ .

11.3. Pentru ce valori reale  $\alpha$  ecuația  $\sin 3x = \alpha \sin x + (4 - 2|\alpha|)\sin^2 x$  are aceeași mulțime de soluții reale ca și ecuația  $\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2 \sin x \cos 2x$ ?

11.4. Fie că în tetraedru se intersectează două segmente, care vin din capetele unei laturi, în centrele cercurilor înscrise ale fețelor opuse. Demonstrați că două segmente, care vin din capetele laturi, care se încrucișează cu latura inițială, în centrele cercurilor înscrise a altor două fețe, prin urmare, la fel se intersectează.

**Timp de lucru: 240 minute.**

**Rezolvarea corectă a fiecărei probleme se apreciază cu 7 puncte. MULT SUCCES !**