Olimpiada Republicană la Matematică
Prima zi, 29 februarie 2020, Clasa a XI–a

Soluţii

11.1. *Pentru ce valori reale ale parametrului* a *graficul funcției* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-8x^3+14x^2+ax$ *are o axă de simetrie paralelă cu dreapta* $x=0$ *?*

Soluție.

Deoarece graficul funcției $f(x)$ are o axă de simetrie paralelă cu dreapta $x=0$, atunci axa de simetrie are ecuația $x=c$, unde c este o valoare reală constantă. Substituind $t=x-c$, obținem că graficul funcției $f(t)$, ca funcție de t, va fi simetric în raport cu dreapta $t=0$, adică axa Oy. Avem:

$$P(t)=x^4-8x^3+14x^2+ax=(t+c)^4-8(t+c)^3+14(t+c)^2+a(t+c)=$$
$$=t^4+4t^3c+6t^2c^2+4tc^3+c^4-8(t^3+3t^2c+3tc^2+c^3)+14(t^2+2tc+c^2)+at+ac=$$
$$=t^4+t^3(4c-8)+t^2(6c^2-24c+14)+t(4c^3-24c^2+28c+a)+(c^4-8c^3+14c^2+ac).$$

Graficul funcției $f(t)$ este simetric în raport cu axa Oy, atunci și numai atunci când funcția $f(t)$ este pară, adică dacă și numai dacă coeficienții funcției $f(t)$ corespunzători puterilor impare ale lui t sunt egali cu 0. Obținem

$$\begin{cases}4c-8=0\\4c^3-24c^2+28c+a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=2\\a=-4c^3+24c^2-28c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=2\\a=-4\cdot8+24\cdot4-28\cdot2=8\end{cases}.$$

Răspuns final: $a=8$.

11.2. *Fie șirul* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *astfel încât* $a_1=1$ *și* $a_{m+n}+a_{m-n}=\frac{1}{2}(a_{2m}+a_{2n})$, $\forall m\ge n\ge 0$. *Să se determine* a_{2020}.

Soluție.

Considerând $m=n$, avem $a_{2m}+a_0=\frac{1}{2}(a_{2m}+a_{2m})=a_{2m}$, $\forall m\ge 0$, ceea ce implică $a_0=0$.

Similar, considerând $n=0$, obținem $a_m+a_m=\frac{1}{2}(a_{2m}+a_0)=\frac{1}{2}a_{2m}$, adică $a_{2m}=4a_m$, $\forall m\ge 0$.

În continuare, pentru $m=n+2$, $\forall n\ge 0$, obținem

$$4a_{n+1}+4=4a_{n+1}+4a_1=a_{2n+2}+a_2=a_{m+n}+a_{m-n}=\frac{1}{2}(a_{2m}+a_{2n})=\frac{1}{2}(4a_m+4a_n)=2(a_{n+2}+a_n).$$

Deci, $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$, $\forall n\ge 0$, unde $a_0=0$ și $a_1=1$.

Demonstrăm prin inducție matematică formula $a_n=n^2$, $\forall n\ge 0$. Pentru $n<2$ egalitatea este justă, deoarece $a_0=0=0^2$ și $a_1=1=1^2$. Fie formula este justă pentru $\forall n\le N$. Avem

$$a_{N+1}=2a_N-a_{N-1}+2=2N^2-(N-1)^2+2=(N+1)^2.$$

Deci, afirmația este justă și pentru $n=N+1$. Conform metodei inducției matematice, avem $a_n=n^2$, $\forall n\ge 0$. Obținem $a_{2020}=2020^2$.

11.3. *Pentru ce valori reale* $\boldsymbol{\alpha}$ *ecuația* $\sin 3x = \boldsymbol{\alpha}\sin x + (4-2|\boldsymbol{\alpha}|)\sin^2 x$ *are aceeași mulțime de soluții reale ca și ecuația* $\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x \cos 2x$ *?*

Soluție.

Utilizând identitățile $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ și $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, ecuația a doua este echivalentă cu $\sin x - 2\sin^2 x = 0$, adică $\sin x = 0$ sau $\sin x = \dfrac{1}{2}$.

Utilizând identitatea $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, prima ecuație este echivalentă cu ecuația $3\sin x - 4\sin^3 x = \boldsymbol{\alpha}\sin x + (4-2|\boldsymbol{\alpha}|)\sin^2 x$. Se observă că $\sin x = 0$ verifică această ecuație. Pentru $\sin x \neq 0$, ecuația dată obține forma $3 - 4\sin^2 x = \boldsymbol{\alpha} + (4-2|\boldsymbol{\alpha}|)\sin x$. Impunând ca $\sin x = \dfrac{1}{2}$ să respecte această egalitate, obținem $\boldsymbol{\alpha} - |\boldsymbol{\alpha}| = 0$, echivalent cu $\boldsymbol{\alpha} \geq 0$.

Pentru $\boldsymbol{\alpha} \geq 0$ (și $\sin x \neq 0$), ecuația dată obține forma $3 - 4\sin^2 x = \boldsymbol{\alpha} + (4-2\boldsymbol{\alpha})\sin x$, echivalentă cu ecuația $4\sin^2 x + (4-2\boldsymbol{\alpha})\sin x + (\boldsymbol{\alpha}-3) = 0$. Știind că $\sin x = \dfrac{1}{2}$ o satisface, imediat obținem forma echivalentă $2\left(\sin x - \dfrac{1}{2}\right)(2\sin x - (\boldsymbol{\alpha}-3)) = 0$.

Deoarece se cere ca mulțimile soluțiilor reale ale celor 2 ecuații inițiale să coincidă, ecuația $2\sin x - (\boldsymbol{\alpha}-3) = 0$ trebuie să nu aibă alte soluții, cu excepția celor care verifică egalitățile $\sin x = 0$ sau $\sin x = \dfrac{1}{2}$. Deoarece ultima ecuație este echivalentă cu $\sin x = \dfrac{\boldsymbol{\alpha}-3}{2}$, trebuie să avem $\dfrac{\boldsymbol{\alpha}-3}{2} = 0$, $\dfrac{\boldsymbol{\alpha}-3}{2} = \dfrac{1}{2}$ sau $\left|\dfrac{\boldsymbol{\alpha}-3}{2}\right| > 1$, echivalent cu $\boldsymbol{\alpha} = 3$, $\boldsymbol{\alpha} = 4$, $|\boldsymbol{\alpha}-3| > 2$. Deoarece $\boldsymbol{\alpha} \geq 0$, avem $\boldsymbol{\alpha} \in [0,1) \cup \{3,4\} \cup (5,+\infty)$.

11.4. *Fie că în tetraedru se intersectează două segmente, care vin din capetele unei laturi, în centrele cercurilor înscrise ale fețelor opuse. Demonstrați că două segmente, care vin din capetele laturi, care se incrucișează cu latura inițială, în centrele cercurilor înscrise a altor două fețe, prin urmare, la fel se intersectează.*

Soluție.

Fie latura inițială este latura AB, A_1 este centrul cercului înscris în □SBC, B_1 este centrul cercului înscris în □SAC. Conform condiției problemei $[AA_1] \cap [BB_1] \neq \varnothing$. Atunci punctele A, A_1, B, B_1 se află în același plan (AA_1BB_1) □ $\boldsymbol{\alpha}$. Notăm $P = \boldsymbol{\alpha} \cap [SC]$. Atunci

$$(AB_1) \cap (BA_1) = P,$$

deoarece dreapta (AB_1) se intersectează cu $[SC]$ într-un punct oarecare, $(AB_1) \subset \boldsymbol{\alpha}$ și P este unicul punct comun al segmentului $[SC]$ și planului $\boldsymbol{\alpha}$. Analogic pentru dreapta (BA_1).

Deoarece A_1 este centrul cercului înscris în □SBC, atunci BP este bisectoarea unghiului $\angle SBC$, analogic AP este bisectoarea unghiului $\angle SAC$. Prin urmare, conform teoremei despre bisectoare

$$\frac{BC}{BS} = \frac{SP}{PC} = \frac{AC}{AS}.$$

Deci $AC \cdot BS = BC \cdot AS$, și obținem

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AS}{BS}. \tag{*}$$

Trasăm acum bisectoarea ST_1 a unghiului $\angle ASB$ și bisectoarea CT_2 a unghiului $\angle ACB$. Atunci conform teoriei despre bisectoare avem (utilizând (*)

$$\frac{AT_2}{T_2B} = \frac{AC}{BC} = \frac{AS}{BS} = \frac{AT_1}{T_1B},$$

Deci $T_1 \equiv T_2$. Atunci punctele S, C și centrele cercurilor înscrise în $\triangle ASB$ și $\triangle ACB$ se află în același plan. Prin urmare, se intersectează segmentelr, care unesc vârfurile S și C cu centrele cercurilor înscris ale celor două fețe opuse rămase.