Olimpiada Republicană la Matematică

Prima zi, 29 februarie 2020, Clasa a XI–a

Barem de evaluare

11.1. *Pentru ce valori reale ale parametrului* a *graficul funcției* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-8x^3+14x^2+ax$ *are o axă de simetrie paralelă cu dreapta* $x=0$ *?*

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Scrierea ecuației axei de simetrie: $x=c$.	1
2	Efectuarea substituției $t=x-c$ și afirmarea faptului că graficul funcției $f(t)$, ca funcție de t, e simetric în raport cu axa Oy.	1
3	Desfășurarea expresiilor $(t+c)^4$, $(t+c)^3$ și $(t+c)^2$.	1
4	Obținerea coeficienților funcției $f(t)$.	1
5	Afirmarea faptului că funcția $f(t)$ este pară și, respectiv, toți coeficienții corespunzători puterilor impare ale lui t sunt egali cu 0.	1
6	Determinarea valorii $c=2$.	1
7	Obținerea valorii $a=8$.	1
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

11.2. *Fie șirul* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *astfel încât* $a_1=1$, $a_{m+n}+a_{m-n}=\frac{1}{2}(a_{2m}+a_{2n})$, $\forall m\ge n\ge 0$. *Să se determine* a_{2020}.

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Aflarea termenului $a_0=0$.	1
2	Obținerea relației $a_{2m}=4a_m$, $\forall m\ge 0$.	1
3	Determinarea formulei $a_{2n+2}+a_2=2(a_{n+2}+a_n)$, $\forall n\ge 0$.	1
4	Demonstrarea relației $a_{2n+2}+a_2=4a_{n+1}+4$, $\forall n\ge 0$.	1
5	Obținerea relației recurente $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$, $\forall n\ge 0$.	1
6	Demonstrarea formulei $a_n=n^2$, $\forall n\ge 0$.	1
7	Concluzionarea faptului că $a_{2020}=2020^2$.	1
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

11.3. *Pentru ce valori reale* $\boldsymbol{\alpha}$ *ecuația* $\sin 3x = \boldsymbol{\alpha} \sin x + (4 - 2\lvert\boldsymbol{\alpha}\rvert)\sin^2 x$ *are aceeași mulțime de soluții reale ca și ecuația* $\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x \cos 2x$ *?*		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Obținerea faptului că ecuația neparametrică este echivalentă cu $\sin x \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$.	1
2	Verificarea faptului că $\sin x = 0$ satisface ecuația parametrică dată.	1
3	Pentru $\sin x \neq 0$, obținerea formei echivalente $3 - 4\sin^2 x = \boldsymbol{\alpha} + (4 - 2\lvert\boldsymbol{\alpha}\rvert)\sin x$.	1
4	Obținerea inegalității $\boldsymbol{\alpha} \geq 0$.	1
5	Pentru $\boldsymbol{\alpha} \geq 0$ și $\sin x \notin \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$, obținerea formei echivalente $\sin x = \frac{\boldsymbol{\alpha} - 3}{2}$.	1
6	Obținerea faptului că $\frac{\boldsymbol{\alpha} - 3}{2} = 0$, $\frac{\boldsymbol{\alpha} - 3}{2} = \frac{1}{2}$ sau $\left\lvert\frac{\boldsymbol{\alpha} - 3}{2}\right\rvert > 1$.	1
7	Scrierea corectă a soluției: $\boldsymbol{\alpha} \in [0,1) \cup \{3,4\} \cup (5,+\infty)$.	1
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

11.4. *Fie că în tetraedru se intersectează două segmente, care vin din capetele unei laturi, în centrele cercurilor înscrise ale fețelor opuse. Demonstrați că două segmente, care vin din capetele laturi, care se incrucișează cu latura inițială, în centrele cercurilor înscrise a altor două fețe, prin urmare, la fel se intersectează.*		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Capetele laturi și centrele cercurilor înscrise se află în același plan.	1
2	Bisectoarele unghiurilor *A* și *B* din fețelor opuse se intersectează într-un punct comun.	1
3	Aplicarea teoremei despre bisectoare pentru bisectoare *AP* și *BP*.	1
4	Obținerea relației *AC/BC = AS/BS*.	1
5	Bisectoarele unghiurilor *S* și *C* din fețelor opuse rămase se intersectează într-un punct comun.	1
6	Capetele laturi, care se incrucișează cu latura inițială, și centrele cercurilor înscrise ale celor două fețe opuse rămase se află în același plan.	1
7	Finalizarea demonstrației problemei.	1
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*