Республиканская Олимпиада по Математике
Второй день, 1 марта 2020 года, X-й класс
Схема оценивания

10.5. Докажите, что любое множество состоящее из 112 натуральных чисел, меньших 1000, содержит два числа, разность которых равна трёхзначному числу вида $\overline{aaa}$, $a \geq 1$.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Определение $X = \{x_1, x_2, ..., x_{112}\}$ где $x_i \in \mathbb{N}$ и $x_i < 1000$, $\forall i = \overline{1, 112}$.	1б.
2	Получение $x_i = 111 \cdot q_i + r_i$, где q_i - цифра и $r_i \in \{0, 1, ..., 110\}$.	2б.
3	Получение существования x_m и x_n, $m \neq n$ так что $r_m = r_n$.	1б.
4	Предполагается, что $x_m > x_n$.	1б.
5	Получение $x_m - x_n = 111(q_m - q_n)$, где $q_m - q_n = a$ - ненулевая цифра.	1б.
6	Получение $x_m - x_n = \overline{aaa}$.	1б.
	Общее количество баллов	**7 баллов**

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

10.6. Найдите все целые числа n, для которых число $A = \sqrt[3]{n + \sqrt[3]{n-1}}$ является рациональным.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Предполагается, что $A \in \mathbb{Q}$ и уточняется, что $\exists x \in \mathbb{Q} : x^3 = n + \sqrt[3]{n-1}$.	1б.
2	Уточняется, что $\exists y \in \mathbb{Q} : y^3 = n - 1$.	1б.
3	Получение соотношения $x^3 = y^3 + y + 1$.	1б.
4	Изучение случая $n > 1$.	1б.
5	Изучение случаев $n = 1$ и $n = 0$.	1б.
6	Изучение случая $n < 0$.	1б.
7	Получение правильного ответа в результате изучения всех случаев.	1б.
	Общее количество баллов	**7 баллов**

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

10.7. Решить на множестве □ уравнение $16x+(x-1)\cdot 4^{x+1}=x^2(4^x+8+4^{\frac{1}{x}})$.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Запись уравнения в форме $x^2\cdot 4^{\frac{1}{x}}+(2-x)^2\cdot 4^x=8x(2-x)$.	1б.
2	Уточняется, что $x\neq 0$ и что $x=2$ не является решением.	1б.
3	Запись уравнения в форме $\frac{x}{2-x}\cdot 4^{\frac{1}{x}}+\frac{2-x}{x}\cdot 4^x=8$.	1б.
4	Установление, что $x\in(0;2)$.	1б.
5	Получение $\frac{x}{2-x}\cdot 4^{\frac{1}{x}}+\frac{2-x}{x}\cdot 4^x\geq 2^{\frac{1}{x}+x+1}$.	1б.
6	Получение $\frac{x}{2-x}\cdot 4^{\frac{1}{x}}+\frac{2-x}{x}\cdot 4^x\geq 2^{2+1}=8$.	1б.
7	Получение решения $x=1$.	1б.
	Общее количество баллов	**7 баллов**

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

10.8. Найдите максимальную возможную площадь четырёхугольника длины сторон которого равны $1\ см$, $2\sqrt{2}\ см$, $3\ см$ и $4\ см$.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Уточняется, что в выпуклом четырёхугольнике при перестановке мест двух соседних сторон, площадь четырёхугольника не меняется.	1б.
2	Уточняется, что благодаря перестановке мест соседних сторон, стороны могут быть размещены в порядке возрастания их длин.	1б.
3	Получение $A_{ABCD}\leq 3\sqrt{2}+2$.	2б.
4	Замечается, что $1^2+4^2=17=\left(2\sqrt{2}\right)^2+3^2$.	1б.
5	Показано, что максимальная площадь достигается, когда одна диагональ делит четырехугольник на два прямоугольных треугольника соответствующих размеров.	2б.
	Общее количество баллов	**7 баллов**

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*