Olimpiada Republicană la Matematică

A doua zi, 1 martie 2020, Clasa a X–a

Barem de evaluare

10.5. Demonstraţi că orice mulţime alcătuită din 112 numere naturale mai mici decât 1000, conţine două numere diferenţa cărora este un număr de trei cifre de forma $\overline{aaa}$, $a \geq 1$.

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Se defineşte $X = \{x_1, x_2, ..., x_{112}\}$ unde $x_i \in \mathbb{N}$ şi $x_i < 1000$, $\forall i = \overline{1, 112}$.	1p.
2	Se obţine $x_i = 111 \cdot q_i + r_i$, unde q_i - cifră şi $r_i \in \{0, 1, ..., 110\}$.	2p.
3	Se obţine existenţa x_m şi x_n, $m \neq n$ astfel încât $r_m = r_n$.	1p.
4	Se presupune $x_m > x_n$.	1p.
5	Se obţine $x_m - x_n = 111(q_m - q_n)$, unde $q_m - q_n = a$ - cifră nenulă.	1p.
6	Se obţine $x_m - x_n = \overline{aaa}$.	1p.
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

10.6. Determinaţi toate numerele întregi n pentru care numărul $A = \sqrt[3]{n + \sqrt[3]{n-1}}$ este raţional.

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Se presupune că $A \in \mathbb{Q}$ şi se menţionează că $\exists x \in \mathbb{Q} : x^3 = n + \sqrt[3]{n-1}$.	1p.
2	Se menţionează că $\exists\, y \in \mathbb{Q} : y^3 = n - 1$.	1p.
3	Se obţine relaţia $x^3 = y^3 + y + 1$.	1p.
4	Se studiază cazul $n > 1$.	1p.
5	Se studiază cazurile $n = 1$ şi $n = 0$.	1p.
6	Se studiază cazul $n < 0$.	1p.
7	Se obţine răspunsul corect în rezultatul studiului tuturor cazurilor.	1p.
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

10.7. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $16x+(x-1)\cdot 4^{x+1}=x^2(4^x+8+4^{\frac{1}{x}})$.

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Se reprezintă ecuaţia în forma $x^2\cdot 4^{\frac{1}{x}}+(2-x)^2\cdot 4^x=8x(2-x)$.	1p.
2	Se menţionează că $x\neq 0$ şi că $x=2$ nu este soluţie.	1p.
3	Se reprezintă ecuaţia în forma $\frac{x}{2-x}\cdot 4^{\frac{1}{x}}+\frac{2-x}{x}\cdot 4^x=8$.	1p.
4	Se determină că $x\in(0;2)$.	1p.
5	Se obţine $\frac{x}{2-x}\cdot 4^{\frac{1}{x}}+\frac{2-x}{x}\cdot 4^x\geq 2^{\frac{1}{x}+x+1}$.	1p.
6	Se obţine $\frac{x}{2-x}\cdot 4^{\frac{1}{x}}+\frac{2-x}{x}\cdot 4^x\geq 2^{2+1}=8$.	1p.
7	Se obţine soluţia $x=1$.	1p.
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

10.8. Aflaţi aria maximală posibilă a patrulaterului lungimile laturilor căruia sunt egale cu $1\ cm$, $2\sqrt{2}\ cm$, $3\ cm$ şi $4\ cm$.

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Se menţionează că la schimbarea locurilor a două laturi vecine într-un patrulater convex, aria patrulaterului nu se schimbă.	1p.
2	Se mentionează că datorită schimbării locurilor laturilor vecine, laturile se pot așeza în ordine crescătoare a lungimilor lor.	1p.
3	Se obţine $A_{ABCD}\leq 3\sqrt{2}+2$.	2p.
4	Se observă că $1^2+4^2=17=\left(2\sqrt{2}\right)^2+3^2$.	1p.
5	Se arată că aria maximală se realizează când o diagonală împarte patrulaterul în două triunghiuri dreptunghice de dimensiuni respective.	2p.
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*