Olimpiada Republicană la Matematică
Prima zi, 29 februarie 2020, Clasa X–a

Soluţii

10.1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2020^{x^2-2x}+\dfrac{x^2-2x}{2020^x}=1$.

Soluţie: 1) Dacă $x^2-2x<0$, atunci $2020^{x^2-2x}<2020^0=1$ și $\dfrac{x^2-2x}{2020^x}<0$. Prin urmare $2020^{x^2-2x}+\dfrac{x^2-2x}{2020^x}<1$, deci ecuația nu are soluții în acest caz.

2) Dacă $x^2-2x>0$, atunci $2020^{x^2-2x}>2020^0=1$ și $\dfrac{x^2-2x}{2020^x}>0$. Prin urmare $2020^{x^2-2x}+\dfrac{x^2-2x}{2020^x}>1$, deci ecuația nu are soluții în acest caz.

3) Dacă $x^2-2x=0$, adică $\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$, atunci ecuația inițială se verifică.

Răspuns: $S=\{0;2\}$.

10.2. Determinați cea mai mare valoare posibilă a raportului dintre suma cifrelor unui număr de patru cifre și însuși numărul.

Soluţie: Fie $\overline{abcd}$ un număr de patru cifre. Atunci

$$\frac{\overline{abcd}}{a+b+c+d}=\frac{1000a+100b+10c+d}{a+b+c+d}=1+\frac{999a+99b+9c}{a+b+c+d}.$$

Deoarece $d\le 9$, obținem $\dfrac{\overline{abcd}}{a+b+c+d}\ge 1+\dfrac{999a+99b+9c}{a+b+c+9}=$

$$=1+\frac{999(a+b+c+9)-900b-990c-999\cdot 9}{a+b+c+9}=1+999-\frac{900b+990c+999\cdot 9}{a+b+c+9}.$$

Deoarece $a\ge 1$, obținem $\dfrac{\overline{abcd}}{a+b+c+d}\ge 1000-\dfrac{900b+990c+999\cdot 9}{b+c+10}=$

$$=1000-\frac{900(b+c+10)+90c-9}{b+c+10}=1000-900-\frac{90c-9}{b+c+10}=100-\frac{90c-9}{b+c+10}.$$

Deoarece $b\ge 0$, obținem $\dfrac{\overline{abcd}}{a+b+c+d}\ge 100-\dfrac{90c-9}{c+10}=100-\dfrac{90(c+10)-909}{c+10}=$

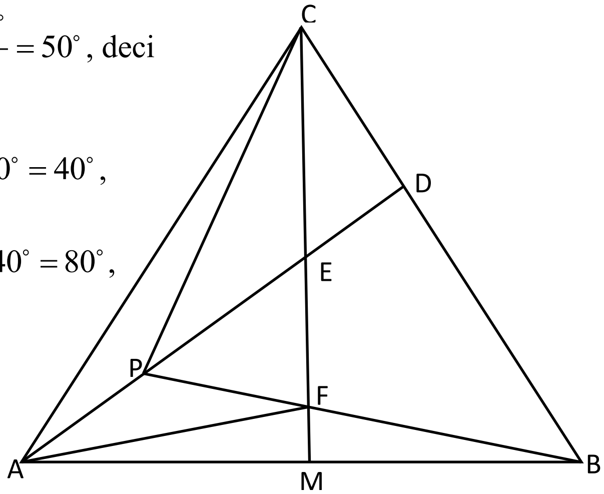
$$=100-90+\frac{909}{c+10}=10+\frac{909}{c+10}.$$

Deoarece $c\le 9$, obținem $\dfrac{\overline{abcd}}{a+b+c+d}\ge 10+\dfrac{909}{19}=\dfrac{1099}{19}$.

Prin urmare $\dfrac{a+b+c+d}{\overline{abcd}}\le\dfrac{19}{1099}$, deci cea mai mare valoare este $\dfrac{19}{1099}$ pentru numărul 1099.

Răspuns: $\dfrac{19}{1099}$.

10.3. În interiorul triunghiului isoscel $ABC\ (AC = BC)$ cu $m(\angle C) = 80^\circ$ este situat punctul P astfel încât $m(\angle PAB) = 30^\circ$ și $m(\angle PBA) = 10^\circ$. Determinați măsura în grade a unghiului CPB.



Soluţie: În $\triangle ABC$ $m(\angle A) = m(\angle B) = \dfrac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ$, deci
$m(\angle PBD) = 50^\circ - 10^\circ = 40^\circ$.
$\angle BPD$ - exterior $\triangle ABP \Rightarrow m(\angle BPD) = 30^\circ + 10^\circ = 40^\circ$,
prin urmare $\triangle PBD$ - isoscel $\Rightarrow PD = BD$.
$\angle PDC$ - exterior $\triangle PDB \Rightarrow m(\angle PDC) = 40^\circ + 40^\circ = 80^\circ$,
prin urmare $\triangle ACD$ - isoscel $\Rightarrow AC = AD$.
Din $AD = BC$ și $PD = BD$ urmează $AP = CD$.
Ducem înălțimea CM în $\triangle ABC \Rightarrow$
$\triangle AFB$ - isoscel. $\angle PFA$ - exterior $\triangle AFB$
$\Rightarrow m(\angle PFA) = 10^\circ + 10^\circ = 20^\circ$, iar
$m(\angle PAF) = 30^\circ - 10^\circ = 20^\circ$, deci $\triangle APF$ - isoscel $\Rightarrow AP = PF \Rightarrow PF = CD$. $\angle EPF$ - exterior $\triangle APF \Rightarrow m(\angle EPF) = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ$, $m(\angle ECD) = 80^\circ : 2 = 40^\circ$, $m(\angle FEP) = m(\angle DEC)$
$\Rightarrow m(\angle PFE) = m(\angle CDE)$. Prin urmare conform criteriului ULU $\triangle CED \equiv \triangle PEF \Rightarrow PE = CE$
$\Rightarrow \triangle PCE$ - isoscel. $\angle PEC$ - exterior $\triangle CED \Rightarrow m(\angle PEC) = 40^\circ + 80^\circ = 120^\circ$
$\Rightarrow m(\angle CPE) = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$. $m(\angle CPB) = m(\angle CPE) + m(\angle EPF) = 30^\circ + 40^\circ = 70^\circ$.

Răspuns: $m(\angle CPB) = 70^\circ$.

10.4. Demonstrați că pentru orice numere reale $a, b, c, d > 0$ are loc relația

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\frac{b}{c+d+a}} + \sqrt{\frac{c}{d+a+b}} + \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} > 2.$$

Soluţie: Utilizând relația dintre media geometrică și media aritmetică, obținem

$$\sqrt{\frac{b+c+d}{a}} = \sqrt{\frac{b+c+d}{a} \cdot 1} \le \frac{\frac{b+c+d}{a} + 1}{2} = \frac{a+b+c+d}{2a}.$$ De unde $\sqrt{\dfrac{a}{b+c+d}} \ge \dfrac{2a}{a+b+c+d}$.

În mod analog, avem

$$\sqrt{\frac{b}{c+d+a}} \ge \frac{2b}{a+b+c+d},\ \sqrt{\frac{c}{d+a+b}} \ge \frac{2c}{a+b+c+d} \text{ și } \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} \ge \frac{2d}{a+b+c+d}.$$

Prin urmare $\sqrt{\dfrac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\dfrac{b}{c+d+a}} + \sqrt{\dfrac{c}{d+a+b}} + \sqrt{\dfrac{d}{a+b+c}} \ge$

$$\ge \frac{2a}{a+b+c+d} + \frac{2b}{a+b+c+d} + \frac{2c}{a+b+c+d} + \frac{2d}{a+b+c+d} = \frac{2(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 2.$$

Egalitate ar fi dacă $\dfrac{b+c+d}{a} = 1$, $\dfrac{c+d+a}{b} = 1$, $\dfrac{d+a+b}{c} = 1$ și $\dfrac{a+b+c}{d} = 1$, ceea ce este imposibil. Deci $\sqrt{\dfrac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\dfrac{b}{c+d+a}} + \sqrt{\dfrac{c}{d+a+b}} + \sqrt{\dfrac{d}{a+b+c}} > 2$.