Теоретический тур ORF 2024, 12 класс

Задача 1 (10,0 б.)

Решение

1A. (4,0 б.)

Сформулируем правило квантования атома водорода на языке волн Де Бройля. В случае атома водорода правило квантования состоит в том, что на боровской орбите должно поместится целое число волн Де Бройля.

$$2\pi r = nh/p = n\lambda \quad (1{,}0\text{ б.})$$

Используем это правило для ямы.

Период движения частицы между стенками квантовой ямы соответствует пути $2l$, а следовательно

$$p = nh/2l \quad (0{,}5\text{ б.})$$

В яме может уместится целое число полуволн Де Бройля

$$l = nh/2p \quad (0{,}5\text{ б.})$$

Спектр энергий частицы в квантовой яме определяется уравнением

$$E_n = n^2\hbar^2\pi^2/2ml^2, n = 1,2,3... \quad (1{,}0\text{ б.})$$

Силу давления оценим, используя закон сохранения энергии

$$E = F\cdot\Delta x \quad (0{,}25\text{ б.}),\text{ где } \Delta x = l \quad (0{,}25\text{ б.})$$

Следовательно, $F \cong \hbar^2/ml^3$ (0,5 б.)

1B. (6,0 б.)

Согласно модели Томсона заряд ядра равномерно распределен по объему шара радиуса R с плотностью

$$\rho = e/\frac{4}{3}\pi R^3 \quad (0{,}25\text{ б.})$$

На расстоянии r от центра ядра напряженность электрического поля E в соответствии с теоремой Гаусса

$$\varepsilon_0 4\pi r^2 E = e(r/R)^3 \quad (0{,}25\text{ б.})$$

равна

$$E = e\kappa r/R^3, \kappa = 1/4\pi\varepsilon_0 \quad (0{,}25\text{ б.})$$

В гауссовой системе единиц $\kappa = 1$. При отклонении электрона от центра ядра на него действвет возвращающая сила

$$F = -e^2\kappa r/R^3 = -kr \quad (0{,}25\text{ б.}),$$

которая вызывает колебания элктрона с частотой $\omega = \sqrt{k/m}$, где $k = e^2\kappa/R^3$ (0,25 б.).

Эту же частоту света ω атом и излучает $\omega^2 = e^2\kappa / mR^3$ (0,25 б.).

Таким образом радиус атома водорода равен

$$R = \left(4{,}8^2 10^{-20} / 0{,}91 \cdot 10^{-27} 10^{30}\right)^{1/3} = 6{,}3 \cdot 10^{-8}\, cm \quad (0{,}50 \text{ б.})$$

Для оценки величины R используем также величину данной нам энергии ионизации. Потенциал электрического поля ядра равен

$$E = -d\varphi / dr\,, \varphi(r) = -e\kappa r^2 / 2R^3 + a \quad (0{,}50 \text{ б.})$$

Постоянную интегрирования a найдем из условия $\varphi(R) = e\kappa / R$ (0,25 б.)

для кулоновского потенциала на границе атома. Таким образом имеем

$$\varphi(r) = e\kappa\left(3 - r^2 / R^2\right) / 2R \quad (0{,}50 \text{ б.})$$

Энергия взаимодействия электрона с ядром равна $W(r) = -e\varphi(r)$ (0,25 б.)

Точечный электрон находится на расстоянии r от центра ядра. Энергия взаимодействия изменяется от $W = -3e^2\kappa / 2R$ (0,50 б.)

в точке $r = 0$ до $W = -e^2\kappa / R$ (0,25 б.) на границе ядра, где возвращающая сила максимальна.

В точке $r = 0$ кинетическая энергия электрона равна нулю, а энергия ионизации максимальна. Для оценки радиуса ядра используем уравнение $|W| = 3e^2\kappa / 2R$, (0,25 б.) соглавно которому

$$R = 1{,}5e^2\kappa / |W| = 1{,}5 \cdot 4{,}8^2 10^{-20} / 13{,}6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12} = 1{,}6 \cdot 10^{-8}\, cm \quad (0{,}50 \text{ б.}).$$

Радиус атома водорода Томсона порядка одного ангстрема. Длину волны находим по известной, заданной частоте $\lambda = 2\pi c / \omega = 6{,}28 \cdot 3 \cdot 10^{10} / 10^{15} = 0{,}19\,\mu m$ (0,50 б.),

или по величине энергии ионизации $\lambda = 1{,}24 / 13{,}6 = 0{,}09\,\mu m$ (0,50 б.).

Такой фотон должен поглотить атом для ионизации при переходе из основного состояния.

Теоретический тур ORF 2024, 12 класс

Задача 2 (10,0 б.)

Решение

2A. (3,0 б.)

Согласно первому постулату атом может находиться в одном из дискретных стационарных состояний с определенной энергией. В стационарном состоянии атом не излучает и не поглощает свет. Дискретный ряд разрешенных значений энергии атома $E_1 E_2 .... E_n$ (0,25 б.). нумеруют главным квантовым числом $n = 1,2..\infty$.

E_1-наинизший уровень, который определяет основное состояние атома (0,25 б.).

Второй постулат позволяет найти боровскую частоту перехода $\hbar\omega_{nm} = E_n - E_m$, (0,25 б.)

которая и задает энергию фотона, излучаемого, или поглощаемого атомом (0,25 б.)

Правило квантования орбитального момента электрона в атоме водорода $mvr = n\hbar$ (0,40 б.)

позволило Бору выделить из непрерывного множества значений энергии дискретный ряд. При движении по круговым орбитам $\frac{mv^2}{r} = \kappa\frac{e^2}{r^2}, mv^2mr^2 = \kappa\frac{e^2}{r}mr^2 = n^2\hbar^2$ (0,30 б.)

Таким образом радиусы боровских орбит равны $r_n = a_B n^2, a_B = \frac{\hbar^2}{\kappa e^2 m} = 0{,}529\cdot 10^{-8}\, cm$ (0,30 б.)

Радиус первой боровской орбиты $r_1 = a_B$

определяет размер атома водорода Бора в основном состоянии. Аналогично квантуется энергия $E_n = -G/n^2, G = 13{,}6 eV$ (0,30 б.)

и скорость электрона в атоме водорода $v_n = n\hbar / mr_n = \hbar / a_B mn$ (0,25 б.)

Боровское правило квантования орбитального момента имеет вид $\oint Ld\varphi = 2\pi L = 2\pi n\hbar, L = n\hbar$ (0,25 б.)

В соответствии с законом сохранения энергии при излучении света находим для частот излучаемых $n \to m$ и поглощаемых $m \to n$ фотонов обобщенную формулу Бальмера $\hbar\omega_{nm} = G\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$, $n > m$

(0,20 б.)

2B. (7,0 б.)

При движении электрона в фазовом пространстве p, q получим некоторую траекторию. В случае боровского атома траекторией является окружность. Мы получим боровское правило квантования, если при постоянном импульсе $p = mv$ вычислим $\oint pdq = mv\oint dq = mv \cdot 2\pi r = 2\pi n\hbar, mvr = n\hbar$ (0,50 б.)

Следовательно $\oint dq = 2\pi r$ (0,50 б.) определяет длину траектории за один период движения в фазовом пространстве. При более сложном движении $\oint pdq$ определяет площадь, ограниченную фазовой траекторией в пространстве p,q. В общем случае фазовое пространство многомерно, так как определяется числом степеней свободы. Правило квантования Бора-Зоммерфельда распространяется на каждую из нормальных координат $\oint p_i dq_i = 2\pi\hbar n_i, i = 1,2..s, s$ -число обобщенных координат (0,50 б.)

В случае отрицательных энергий движение по эллиптическим траекториям периодично

$$\frac{mv^2}{2} = E + \kappa\frac{e^2}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}, I = \oint pdq = 2\int_1^2 \sqrt{2m\left(-|E| + \kappa\frac{e^2}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}dr \quad (1) \quad (1{,}00 \text{ б.}),$$

и имет две точки поворота, где $\dot{r} = 0$.

$$-|E| + \kappa\frac{e^2}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} = 0, r_{1,2} = \frac{\kappa e^2}{2|E|}(1 \pm e) \quad (1{,}00 \text{ б.})$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{2|E|L^2}{m\kappa^2 e^4}}, 2a = r_1 + r_2 = \frac{\kappa e^2}{|E|} \quad (0{,}50 \text{ б.})$$

В интеграле $I = \oint pdq = 2\sqrt{2m|E|}\oint\sqrt{\left(-r + \kappa e^2/|E|\right)}d\sqrt{r}$ (1,00 б.)

при $L = 0$ для S состояний введем переменную $q = \left(r|E|/\kappa e^2\right)^{1/2}$.

Получим $I = 2\sqrt{2m\kappa^2 e^4/|E|}\,2\int_0^1\sqrt{\left(1 - q^2\right)}dq$ (0,50 б.)

Интеграл по четверти окружности единичного радиуса $q^2 + p^2 = 1, q > 0, p = \sqrt{1 - q^2} > 0$

равен $\pi/4$ (0,50 б.)

Таким образом находим $2\sqrt{2m|E|}\frac{\kappa e^2}{|E|}\frac{\pi}{2} = \pi\left(\frac{2m}{|E|}\kappa^2 e^4\right)^{1/2} = 2\pi n\hbar$ (0,50 б.)

и мы приходим к прежнему значению энергии дискретного спектра атома водорода $E_n = -G/n^2$.

Эллипс переходит в окружность при условии, что эксцентриситет обращается в ноль, когда $\frac{2|E|L^2}{m\kappa^2 e^4}=1, E=-\frac{m\kappa^2 e^4}{2L^2}=-G/n^2$ (0,50 б.) при боровском квантовании $L=n\hbar$.

Теоретический тур ORF 2024, 12 класс

Задача 3 (10,0 б.)

Решение

3A. (4,0 б.)

Волны определяются частотой и длиной волны. Фотоны - импульсом и энергией. Связь этих величин определяется уравнениями $E = \hbar\omega = cp, p = \hbar\omega / c = h / \lambda$ (1) (0,25 б.)

Формула (1) характеризует волну Де-Бройля с длиной $\lambda = h / p$ (0,25 б.)

Фотоны имеют три степени свободы, три обобщенные координаты и три импульса. В силу сферической симметрии черного излучения интегрирование по трем проекциям импульса фотона можно свести к интегралу по модулю импульса, переходя от дифференциала в декартовой системе координат к дифференциалу в сферической системе координат $dp_x dp_y dp_z = 4\pi p^2 dp$ (0,25 б.).

Согласно формуле (1) $p / \hbar = \omega / c = k = 2\pi / \lambda$ (0,25 б.)

Правило квантования Бора-Зоммерфельда $\oint pdq = 2\pi\hbar n$ (0,25 б.) позволяет доказать формулу Планка для спектра. Энергия гармонического осциллятора равна $E = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$ (0,25 б.).

Следовательно в фазовом пространстве траекторией гармонического осциллятора является эллипс $\frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2E/k} = 1$ (0,25 б.) с полуосями $a = \sqrt{2mE}, b = \sqrt{2E/k}$ (0,25 б.) и площадью

$\oint pdq = \pi ab = 2\pi E\sqrt{m/k} = 2\pi\hbar n, E = \hbar\omega n$ (0,25 б.) и мы приходим к уравнению

$E = \hbar\omega n$ (2). В термодинамическом равновесии необходимо найти среднее термодинамическое число фотонов $\bar{n}$.

Используя распределение Больцмана, находим $\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx} / \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}, x = \frac{\hbar\omega}{k_0 T}$ Представим

$\bar{n} = -\frac{d}{dx} ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$ (0,25 б.)

Под знаком логарифма стоит сумма бесконечной геометрической

прогрессии, которая равна $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \left(1 - e^{-x}\right)^{-1}$ (0,25 б.). Таким образом

$\bar{n} = -\frac{d}{dx} \ln\left(1 - e^{-x}\right)^{-1} = e^{-x}\left(1 - e^{-x}\right)^{-1} = \left(e^{x} - 1\right)^{-1}$ (0,25 б.)

Окончательно $\bar{n}_\omega = \left(\exp\left(\hbar\omega / k_0 T\right) - 1\right)^{-1}$ (0,50 б.)

Среднее число фотонов с данной частотой ω зависит от температуры. При низких температурах $\bar{n} = \exp(-\hbar\omega / k_0 T)$ (0,25 б.), а при высоких $\bar{n} = k_0 T / \hbar\omega$ (0,25 б.).

3B. (6,0 б.)

Число фотонов в интервале частот ω и $\omega + d\omega$ равно $2V 4\pi\omega^2 d\omega / (2\pi c)^3 = V\omega^2 d\omega / \pi^2 c^3$. (0,50 б.)

Умножив эту величину на $\bar{n}_\omega = \left(\exp(\hbar\omega / k_0 T) - 1\right)^{-1}$ (0,25 б.), получим число фотонов в этом участке спектра, а умножив на $\hbar\omega$ получим энергию черного излучения $dE_\omega = \dfrac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \dfrac{\omega^3 d\omega}{\exp(\hbar\omega / k_0 T) - 1}$ (0,75 б.)(3)

Формула Планка (3) определяет распределение энергии черного излучения по частотам.

Интегрируя по ω, находим плотность энергии черного излучения $u = \int_0^\infty dE_\omega / V$ (0,50 б.). Используя формулу Планка (3), получим $u = \dfrac{\hbar}{\pi^2 c^3} \displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\omega^3 d\omega}{\exp(\hbar\omega / k_0 T) - 1} = \dfrac{\hbar}{\pi^2 c^3} \left(\dfrac{k_0 T}{\hbar}\right)^4 \int_0^\infty \dfrac{x^3 dx}{e^x - 1}$ (0,75 б.) (4).

При малых значениях частот электромагнитного поля $\hbar\omega / k_0 T << 1$ формула (3) переходит в формулу Рэлея – Джинса $dE_\omega = \dfrac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \dfrac{\omega^3 d\omega}{\exp(\hbar\omega / k_0 T) - 1} = \dfrac{V k_0 T}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega$ (5) (0,50 б.)

Докажем классический

предел (5), не используя формулу Планка. Число фотонов $V\omega^2 d\omega / \pi^2 c^3$ (0,25 б.) умножим на энергию гармонического осциллятора в термодинамическом равновесии $\dfrac{1}{2} k_0 T \cdot 2$ (0,25 б.) мы и получим формулу Рэлея – Джинса (5). В обратном пределе $\hbar\omega / k_0 T >> 1$ получим формулу Вина

$$dE_\omega = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} e^{-\hbar\omega / k_0 T} \omega^3 d\omega \quad (0{,}50 \text{ б.})$$

Согласно формуле Планка (3) распределение энергии черного

излучения $\dfrac{x^3}{e^x - 1}$ (0,25 б.) имеет максимум, который найдем, дифференцируя эту функцию $\dfrac{d}{dx} \dfrac{x^3}{e^x - 1} = \dfrac{3x^2}{e^x - 1} - e^x \dfrac{x^3}{(e^x - 1)^2}$ (0,50 б.) и приравнивая производную нулю

$3(e^x - 1) - e^x x = 0, x \cong 2{,}8$ (0,50 б.)

Согласно формуле $\hbar\omega_{\max} \cong k_0 T \cdot 2{,}8$ (0,50 б.) максимум излучения с ростом температуры сдвигается в сторону более высоких частот или малых длин волн (закон смещения Вина).