OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA FIZICĂ, EDIȚIA LVIII

CHIȘINĂU, 29 martie – 1 aprilie 2024

Proba teoretică ORF 2024, clasa a 12

Problemă 1 (10,0 p.)

Soluție

1A. (4,0 p.)

Formulăm regula (condiția) de cuantificare a orbitelor în atomul de hidrogen reieșind din teoria Bohr folosind conceptul undelor de Broglie. În cazul atomului de hidrogen regula de cuantificare constă în aceea că o orbită Bohr trebuie să fie cuprindă un număr întreg de lungimi de undă de Broglie.

$$2\pi r = nh/p = n\lambda \quad (1{,}0 \text{ p.})$$

Vom folosi această regulă pentru groapa de potențial.

Perioada de mișcare a particulei între pereții gropii de potențial corespunde drumului parcurs $2l$, și ca urmare:

$$p = nh/2l \quad (0{,}5 \text{ p.})$$

Groapa de potențial poate să cuprindă un număr întreg de jumătăți de undă de Broglie.

$$l = nh/2p \quad (0{,}5 \text{ p.})$$

Spectrul energiilor particulei într-o groapă de potențial este determinat de ecuația

$$E_n = n^2\hbar^2\pi^2/2ml^2, n = 1,2,3... \quad (1{,}0 \text{ p.})$$

Forța de presiune se estimează folosind legea conservării energiei

$$E = F\cdot\Delta x \quad (0{,}25 \text{ p.}), \text{ unde } \Delta x = l \quad (0{,}25 \text{ p.})$$

Ca urmare, $F \cong \hbar^2/ml^3$ (0,5 p.)

1B. (6,0 p.)

Conform modelului Thomson sarcina nucleului este distribuită uniform în volumul sferei de rază R cu densitatea

$$\rho = e/\frac{4}{3}\pi R^3 \quad (0{,}25 \text{ p.})$$

La distanța r de la centrul nucleului intensitatea câmpului electric E în corespundere cu teorema lui Gauss

$$\varepsilon_0 4\pi r^2 E = e(r/R)^3 \quad (0{,}25 \text{ p.})$$

este

$$E = e\kappa r/R^3, \kappa = 1/4\pi\varepsilon_0 \quad (0{,}25 \text{ p.})$$

La devierea electronului de la centrul nucleului, asupra acestuia acționează forța

$$F = -e^2\kappa r/R^3 = -kr \quad (0{,}25 \text{ p.}),$$

ce determină oscilațiile electronului cu frecvența $\omega = \sqrt{k/m}$, unde $k = e^2\kappa/R^3$ (0,25 p.).

Aceeași frecvență a luminii ω atomul o și emite $\omega^2 = e^2\kappa/mR^3$ (0,25 p.).

Astfel raza atomului de hidrogen este

$$R = \left(4{,}8^2 10^{-20} / 0{,}91 \cdot 10^{-27} 10^{30}\right)^{1/3} = 6{,}3 \cdot 10^{-8}\,cm \quad (0{,}50 \text{ p.})$$

Pentru estimarea mărimii R folosim valoarea energiei de ionizare date. Potențialul câmpului electric a nucleului este

$$E = -d\varphi / dr\,, \varphi(r) = -e\kappa r^2 / 2R^3 + a \quad (0{,}50 \text{ p.})$$

Constanta de integrare a o găsim din condiția $\varphi(R) = e\kappa / R$ (0,25 p.)

din condiția potențialului Coulombian:

$$\varphi(r) = e\kappa\left(3 - r^2 / R^2\right)/ 2R \quad (0{,}50 \text{ p.})$$

Energia de interacțiune a electronului cu nucleul este $W(r) = -e\varphi(r)$ (0,25 p.)

Electronul punctiform se află la distanța r de centrul nucleului. Energia de interacțiune se schimbă de la $W = -3e^2\kappa / 2R$ (0,50 p.)

în punctul $r = 0$ până la $W = -e^2\kappa / R$ (0,25 p.).

În punctul $r = 0$ energia cinetică a electronului este egală cu zero, iar energia de ionizare este maximă. Pentru estimarea razei nucleului folosim $|W| = 3e^2\kappa / 2R$, (0,25 p.)

$R = 1{,}5e^2\kappa / |W| = 1{,}5 \cdot 4{,}8^2 10^{-20} / 13{,}6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12} = 1{,}6 \cdot 10^{-8}\,cm$ (0,50 p.).

Raza atomului de hidrogen conform modelului Thomson este de ordinul 1 Å. Lungimea de undă o găsim cunoscând frecvența $\lambda = 2\pi c / \omega = 6{,}28 \cdot 3 \cdot 10^{10} / 10^{15} = 0{,}19\,\mu m$ (0,50 p.),

sau după mărimea energiei de ionizare $\lambda = 1{,}24 / 13{,}6 = 0{,}09\,\mu m$ (0,50 p.).

Un astfel de foton ar trebui să absoarbă atomul pentru ionizare la trecerea din stare fundamentală.

Proba teoretică ORF 2024, clasa a 12

Problemă 2 (10,0 p.)

Soluție

2A. (3,0 p.)

Conform primului postulat, atomul se poate afla în una din stările staționare discrete cu energie bine determinată. În stare staționară atomul nu emite și nu absoarbe fotoni. Spectrul discret a energiilor permise ale atomului $E_1E_2....E_n$ (0,25 p.) - număr cuantic principal $n=1,2..\infty$.

E_1 - este nivelul cu energia minimă care determină starea fundamentală a atomului (0,25 p.).

Al doilea postulat permite să fie găsită frecvența tranziției $\hbar\omega_{nm} = E_n - E_m$, (0,25 p.)

ce determină energia fotonului emis sau absorbit de atom (0,25 p.)

Regula de cuantificare a momentului orbital al electronului în atomul de hidrogen $mvr = n\hbar$ (0,40 p.)

a dat posibilitate de a găsi valorile discrete ale energiei. La mișcarea pe orbite circulare

$\frac{mv^2}{r} = \kappa\frac{e^2}{r^2}, mv^2mr^2 = \kappa\frac{e^2}{r}mr^2 = n^2\hbar^2$ (0,30 p.)

Astfel razele orbitelor Bohr sunt $r_n = a_Bn^2, a_B = \frac{\hbar^2}{\kappa e^2m} = 0,529\cdot10^{-8}cm$ (0,30 p.)

Raza primei orbite Bohr $r_1 = a_B$

determină dimensiunea atomului de hidrogen în stare fundamentală. Analogic este cuantificată energia $E_n = -G/n^2, G = 13,6eV$ (0,30 p.)

și viteza electronului în atomul de hidrogen $v_n = n\hbar/mr_n = \hbar/a_Bmn$ (0,25 p.)

Regula de cuantificare Bohr a momentului orbital are forma $\oint Ld\varphi = 2\pi L = 2\pi n\hbar, L = n\hbar$ (0,25 p.)

În corespundere cu legea conservării energiei în cazul emisiei $n \to m$ și absorbției $m \to n$ frecvența fotonilor este reflectată în formula generalizată Balmer $\hbar\omega_{nm} = G\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), n > m$ (0,20 p.)

2B. (7,0 p.)

Mișcarea electronului în spațiul fazic p,q determină o traiectorie. În cazul modelului Bohr, traiectoria reprezintă o circumferință. Vom obține regula de cuantificare Bohr dacă în cazul impulsului constant $p = mv$ se calculează $\oint pdq = mv\oint dq = mv\cdot2\pi r = 2\pi n\hbar, mvr = n\hbar$ (0,50 p.) Deci, $\oint dq = 2\pi r$ (0,50 p.) determină lungimea traiectoriei pentru o perioadă de mișcare a acesteia în spațiul fazic. În cazul unei mișcări mai complexe $\oint pdq$ determină suprafața mărginită de traiectorie în spațiul fazice p,q. În caz general, spațiul fazic este multidimensional, deoarece este determinat de numărul de grade de libertate. Regula de cuantificare Bohr-Sommerfeld se extinde pe fiecare din coordonatele normale $\oint p_i dq_i = 2\pi\hbar n_i, i = 1,2..s$, s -numărul coordonatelor generalizate (0,50 p.)

În cazul energiilor negative mișcarea pe traiectorii eliptice este periodică

$$\frac{mv^2}{2} = E + \kappa\frac{e^2}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}, I = \oint pdq = 2\int_1^2 \sqrt{2m\left(-|E| + \kappa\frac{e^2}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}dr \quad (1) \quad (1{,}00 \text{ p.}),$$

și are două puncte de cotitură unde $\dot{r} = 0$.

$$-|E| + \kappa\frac{e^2}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} = 0, r_{1,2} = \frac{\kappa e^2}{2|E|}(1 \pm e) \quad (1{,}00 \text{ p.})$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{2|E|L^2}{m\kappa^2 e^4}}, 2a = r_1 + r_2 = \frac{\kappa e^2}{|E|} \quad (0{,}50 \text{ p.})$$

În integrala $I = \oint pdq = 2\sqrt{2m|E|}\oint\sqrt{\left(-r + \kappa e^2/|E|\right)}d\sqrt{r}$ (1,00 p.)

pentru $L = 0$ pentru stările S vom introduce variabila $q = \left(r|E|/\kappa e^2\right)^{1/2}$.

$$I = 2\sqrt{2m\kappa^2 e^4/|E|}\,2\int_0^1 \sqrt{\left(1 - q^2\right)}dq \quad (0{,}50 \text{ p.})$$

Integrala după un sfert de circumferință de rază unitară $q^2 + p^2 = 1, q > 0, p = \sqrt{1 - q^2} > 0$

este $\pi/4$ (0,50 p.)

Astfel găsim $2\sqrt{2m|E|}\frac{\kappa e^2}{|E|}\frac{\pi}{2} = \pi\left(\frac{2m}{|E|}\kappa^2 e^4\right)^{1/2} = 2\pi n\hbar$ (0,50 p.)

și obținem relația anterioară pentru energia spectrului discret al atomului de hidrogen $E_n = -G/n^2$.

Elipsa trece în circumferință când este satisfăcută condiția că excentricitatea acesteia este zero, adică $\frac{2|E|L^2}{m\kappa^2 e^4} = 1, E = -\frac{m\kappa^2 e^4}{2L^2} = -G/n^2$ (0,50 p.) în cuantificarea Bohr $L = n\hbar$.

Proba teoretică ORF 2024, clasa a 12

Problemă 3 (10,0 p.)

Soluție

3A. (4,0 p.)

Undele sunt determinate de frecvență și lungime de undă. Fotonii sunt determinați de impuls și energie. Legătura dintre aceste mărimi este determinat de expresiile $E = \hbar\omega = cp, p = \hbar\omega / c = h / \lambda$ (1) (0,25 p.)

Formula (1) caracterizează lungimea de undă de Broglie $\lambda = h / p$ (0,25 p.)

Fotonii au trei grade de libertate, trei coordonate generalizate și trei impulsuri generalizate. Reieșind din simetria sferică a distribuției radiației corpului absolut negru, integrarea pe trei proiecții ale impulsului fotonului poate fi redusă la integrala după modulul impulsului, trecând de la sistemul cartezian de coordonate la sistemul de coordonate sferic координат $dp_x dp_y dp_z = 4\pi p^2 dp$ (0,25 p.).

Conform (1) $p / \hbar = \omega / c = k = 2\pi / \lambda$ (0,25 p.)

Regula de cuantificare Bohr-Sommerfeld $\oint pdq = 2\pi\hbar n$ (0,25 p.) permite demonstrarea formulei Plank. Energia oscilatorului armonic este $E = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{kq^2}{2}$ (0,25 p.).

Deci în spațiul fazic al traiectoria oscilatorului armonic este o elipsă $\dfrac{p^2}{2mE} + \dfrac{q^2}{2E / k} = 1$ (0,25 p.) cu semiaxele

$a = \sqrt{2mE}, b = \sqrt{2E / k}$ (0,25 p.) și suprafața

$\oint pdq = \pi ab = 2\pi E\sqrt{m / k} = 2\pi\hbar n, E = \hbar\omega n$ (0,25 p.), deci

$E = \hbar\omega n$ (2). În echilibru termodinamic este necesar de a găsi numărul mediu de fotoni $\overline{n}$.

Folosind distribuția Boltzmann $\overline{n} = \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx} / \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}, x = \dfrac{\hbar\omega}{k_0 T}$

$\overline{n} = -\dfrac{d}{dx} ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$ (0,25 p.)

$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \left(1 - e^{-x}\right)^{-1}$ (0,25 p.). Astfel

$\overline{n} = -\dfrac{d}{dx} \ln\left(1 - e^{-x}\right)^{-1} = e^{-x}\left(1 - e^{-x}\right)^{-1} = \left(e^{x} - 1\right)^{-1}$ (0,25 p.)

$\overline{n}_{\omega} = \left(\exp\left(\hbar\omega / k_0 T\right) - 1\right)^{-1}$ (0,50 p.)

Numărul mediu de fotoni de frecvență ω depinde de temperatură. La temperaturi joase $\overline{n} = \exp\left(-\hbar\omega / k_0 T\right)$ (0,25 p.), iar înalte $\overline{n} = k_0 T / \hbar\omega$ (0,25 p.).

Proba teoretică ORF 2024, clasa a 12

3B. (6,0 p.)

Numărul de fotoni în intervalul de frecvențe ω и $\omega + d\omega$ este $2V4\pi\omega^2 d\omega/(2\pi c)^3 = V\omega^2 d\omega/\pi^2 c^3$. (0,50 p.)

Înmulțind numărul de fotoni cu $\bar{n}_\omega = (\exp(\hbar\omega/k_0 T)-1)^{-1}$ (0,25 p.), obținem numărul de fotoni în această regiune a spectrului, iar înmulțind cu $\hbar\omega$ vom obține energia radiației copului absolut negru

$$dE_\omega = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3}\frac{\omega^3 d\omega}{\exp(\hbar\omega/k_0 T)-1} \quad (0{,}75 \text{ p.}) \ (3)$$

Formula lui Plank (3) determină distribuția energiei radiației corpului absolut negru în funcție de frecvență.

Integrând după ω, găsim densitatea energiei corpului absolut negru $u = \int_0^\infty dE_\omega / V$ (0,50 p.). Folosind formula lui Plank (3), obținem $u = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{\exp(\hbar\omega/k_0 T)-1} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\left(\frac{k_0 T}{\hbar}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$ (0,75 p.) (4).

În cazul frecvențelor joase $\hbar\omega / k_0 T << 1$ formula (3) trece în formula Rayleigh–Jeans

$$dE_\omega = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3}\frac{\omega^3 d\omega}{\exp(\hbar\omega/k_0 T)-1} = \frac{Vk_0 T}{\pi^2 c^3}\omega^2 d\omega \quad (5) \quad (0{,}50 \text{ p.})$$

Vom demonstra (5), fără a folosi formula lui Plank. Numărul de fotoni $V\omega^2 d\omega/\pi^2 c^3$ (0,25 p.) îl înmulțim cu energia oscilatorului armonic în echilibru termodinamic $\frac{1}{2}k_0 T \cdot 2$ (0,25 p.) , obținând astfel formula Rayleigh–Jeans (5). În limita $\hbar\omega / k_0 T >> 1$ obținem formula lui Wien

$$dE_\omega = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} e^{-\hbar\omega/k_0 T}\omega^3 d\omega \quad (0{,}50 \text{ p.})$$

Conform formulei Plank (3) distribuția energiei corpului absolut negru

$\frac{x^3}{e^x - 1}$ (0,25 p.) are un maxim, poziția căruia îl găsim differențiând funcția $\frac{d}{dx}\frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{3x^2}{e^x - 1} - e^x \frac{x^3}{(e^x - 1)^2}$ (0,50 p.) și egalând rezultatul cu zero

$$3(e^x - 1) - e^x x = 0, x \cong 2{,}8 \quad (0{,}50 \text{ p.})$$

Reieșind din formulă $\hbar\omega_{\max} \cong k_0 T \cdot 2{,}8$ (0,50 p.) astfel maximul se deplasează spre frecvențe mai înalte sau lungimi de undă mai mici (legea deplasării lui Wien).